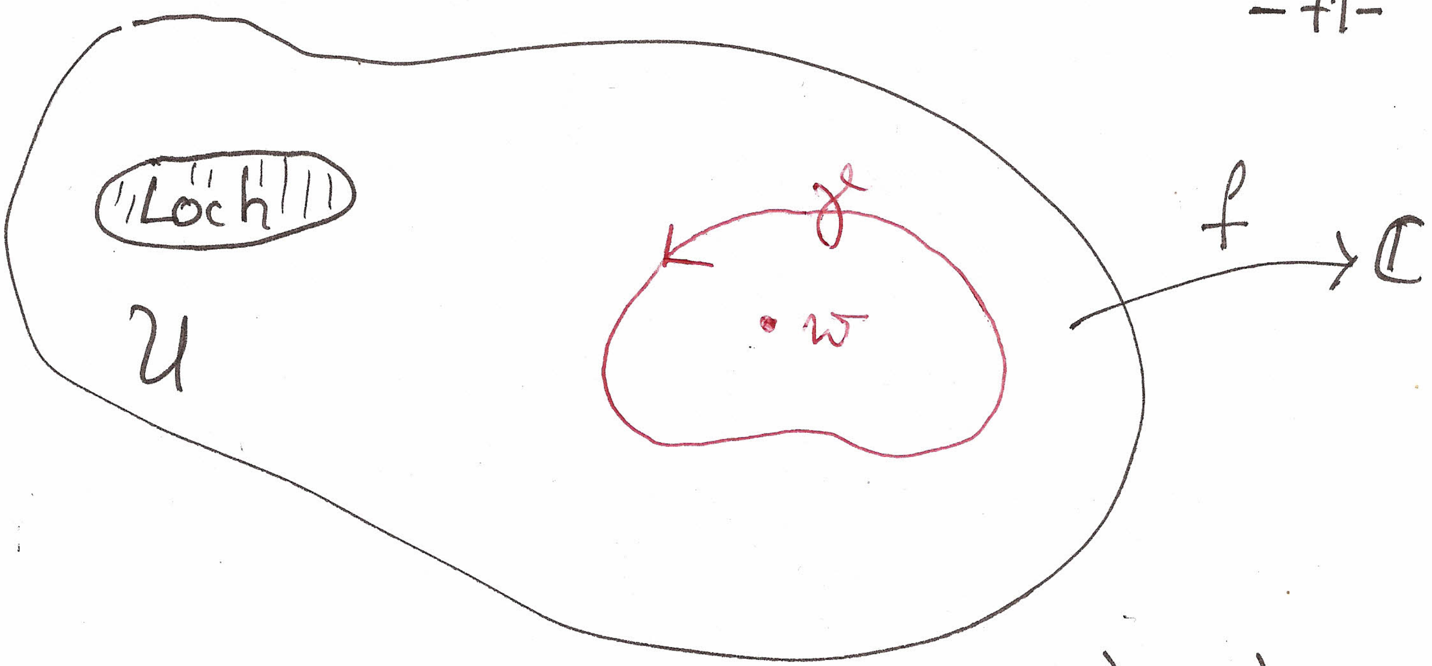
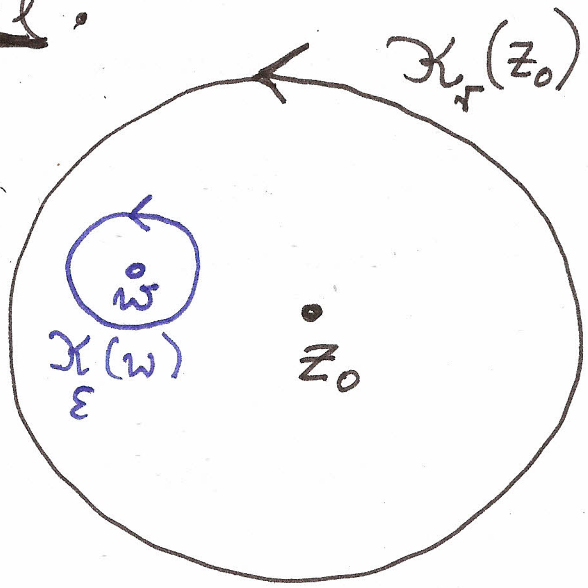



4.) Punkte $w$ auf dem Integrationsweg darf man natürlich nicht einsetzen. („Division durch 0")

---

Beweis der Formel:




nach dem Integralsatz ist für kleine $\varepsilon > 0$

(genauer: nach der Verallgemeinerung)

$$\int_{\mathcal{K}_r(z_0)} \frac{f(z)}{z-w}\,dz = $$

$$\circledast \quad \int_{\mathcal{K}_\varepsilon(w)} \frac{f(z)}{z-w}\,dz,$$

denn die beiden Kreise lassen sich im Holomorphiebereich von

$$z \mapsto \frac{f(z)}{z-w}$$

stetig ineinander deformieren.

r. S. von $\circledast$ $= \displaystyle\int_{\mathcal{K}_\varepsilon(w)} \frac{f(z)-f(w)}{z-w}\,dz$

$$+ f(w) \int_{\mathcal{K}_\varepsilon(w)} \frac{dz}{z-w}$$

$$= \underbrace{\int_{\mathcal{K}_\varepsilon(w)} \frac{f(z)-f(w)}{z-w}\,dz}_{} + 2\pi i\, f(w)$$

$$\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0, \quad \text{da } f \text{ holomorph}$$

(Integrand bleibt beschränkt, Länge des Integrationsweges $\to 0$)

$\square$

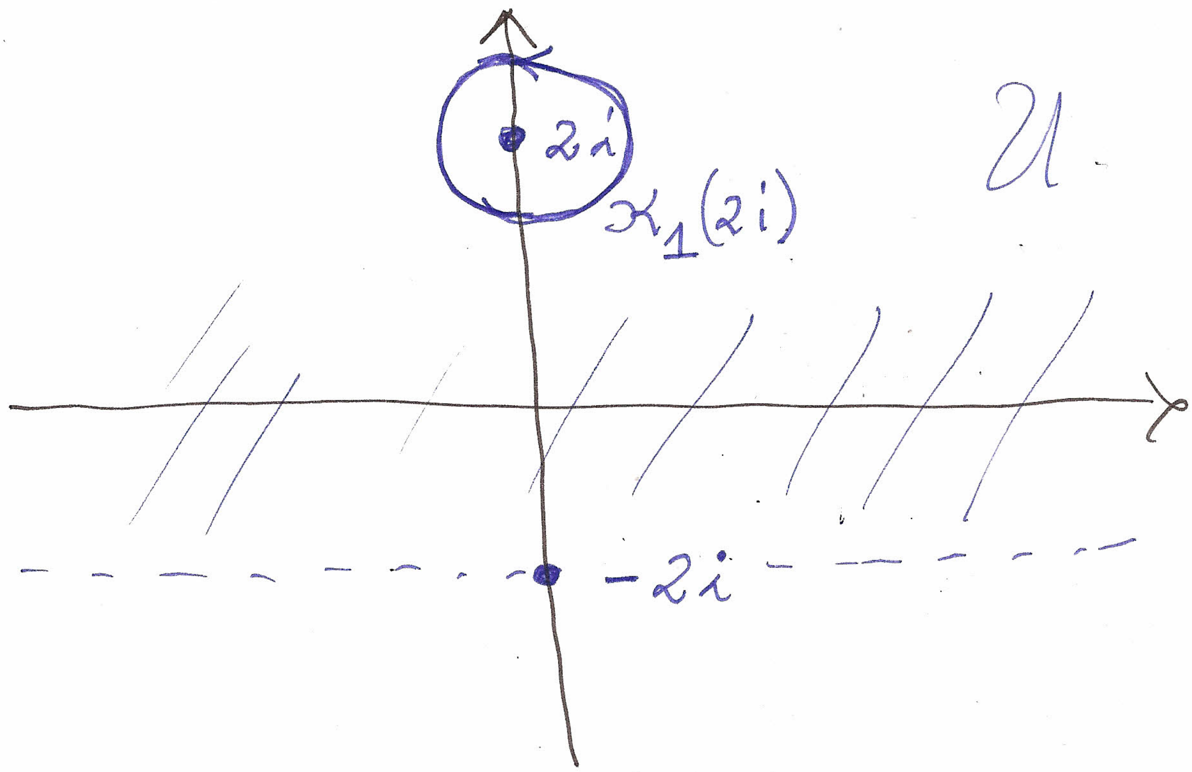
Beispiel/Anwendung:

$$\boxed{\int_{\mathcal{K}_1(2i)} \frac{1}{z^2+4}\,dz = ?}$$

Vorab schaue, ob überhaupt eine sinnvolle Aufgabe (Integral definiert!) vorliegt:

$$z^2 + 4 = 0 \iff z^2 = -4$$

$$\iff z \in \{2i, -2i\}$$




Der Integrand ist also stetig auf $\mathcal{K}_1(2i)$

$\rightsquigarrow$ Integral definiert!

Umformung in die Gestalt

$$\int_{\mathcal{K}_1(2i)} \frac{f(z)}{z-2i}\, dz \qquad (w := z_0 := 2i)$$

$$\frac{1}{z^2+4} = \frac{1}{z-2i} \cdot \frac{1}{z+2i} =$$

$$\frac{f(z)}{z-2i} \quad \text{mit} \quad \boxed{f(z) := \frac{1}{z+2i}}$$

Auf welchem Bereich $\mathcal{U}$ ist $f$ holomorph?

wähle etwa $\mathcal{U} := \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > -2 \}$

Also: $$\int_{\mathcal{K}_1(2i)} \frac{1}{z^2+4}\, dz =$$

$$2\pi i \quad f(2i) = 2\pi i \, \frac{1}{4i} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}.$$

# „Höhere Ableitungen"

Holomorphe Funktionen sind automatisch beliebig oft komplex diff'bar, genauer:

$\boxed{\text{Satz 23.2.2}}$: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann existieren auf $U$ die komplexen Ableitungen $f^{(n)}$ jeder beliebigen Ordnung.

Ist $\overline{B_r(z_0)} \subset U$, so gilt für $w \in B_r(z_0)$ und $n \in \mathbb{N}_0$

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} \, dz$$

**Beweis:** Betrachte

$$B_r(z_0) \ni w \mapsto \int_{\varkappa_r(z_0)} \frac{f(z)}{z-w}\,dz\,;$$

offenbar gilt (Ableiten unter $\int \ldots$)

$$\frac{d}{dw}\int_{\varkappa_r(z_0)} \frac{f(z)}{z-w}\,dz = \int_{\varkappa_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-w)^2}\,dz\,,$$

usw (Induktion). Nach Satz 23.2.1 folgt „alles". $\square$

**Bem:** 1.) Fundamentaler Unterschied zur reellen Situation!

(überlege Bsple. für $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, die man wirklich nur einmal differenzieren kann)

2.) Sei $\boxed{f = u + iv} : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gelten die

CR Dgln : $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$

Nach dem Satz kann man (beliebig oft) weiter partiell differenzieren, es folgt

$$u_{xx} = (v_y)_x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Vertauschbarkeit}}}{=} (v_x)_y = -u_{yy}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} =: \Delta u \equiv 0 \\ v_{xx} + v_{yy} = \Delta v \equiv 0 \end{cases}$$

wobei Gleichung 2 genauso aus CR folgt.

Real- und Imaginärteil holomorpher Funktionen sind also harmonisch, d.h. $\Delta \ldots = 0$.

<u>Beispiel</u> + <u>Anwendung</u>:

1)
$$\int_{\mathcal{K}_1(0)} \frac{e^{iz}}{z^3}\,dz = ?$$

Wähle im Satz

$$w := z_0 := 0, \qquad f(z) := e^{iz}$$

$$\Longrightarrow \quad f''(0) = \frac{2!}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}_1(0)} \frac{f(z)}{z^3}\,dz$$

$$\text{l.S.} = i^2 e^{iz}\Big|_{z=0} = -1$$

$$\text{r.S.} = -\frac{i}{\pi} \int_{\partial K_1(0)} \frac{e^{iz}}{z^3}\, dz$$

$$\Longrightarrow \int_{\partial K_1(0)} \frac{e^{iz}}{z^3}\, dz = \underline{\underline{-i\pi}}$$

2.) Es gibt kein reelles Analogon zum

$\boxed{\text{Satz 23.2.3}}$ : ( Satz v. Liouville )

Ist $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph („eine sog. ganze Fkt.") und zudem beschränkt ($|f(z)| \leq \text{const}\ \forall z \in \mathbb{C}$), dann gibt es ein $c \in \mathbb{C}$ mit

$$f \equiv c \quad \text{auf } \mathbb{C}.$$

Beweis: Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ beliebig.
Für jeden Radius $R > 0$ ist

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}_R(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\, dz$$

$$\Longrightarrow |f'(z_0)| \leq 2\pi \int_0^{2\pi} \frac{|f(\gamma(t))|}{|\gamma(t)-z_0|^2} |\dot{\gamma}(t)|\, dt$$

mit $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$.

$$\Longrightarrow |f'(z_0)| \leq 2\pi \text{ const} \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2} R\, dt$$

$$\hat{=} \frac{1}{R} \longrightarrow 0, \quad R \to \infty$$

also: $f' \equiv 0$

$\Longrightarrow$ $f \equiv c$ für ein $c \in \mathbb{C}$

$\square$